Лекция 1. Комплексные числа. Основные понятия. Действия над комплексными числами

При решении алгебраических уравнений встречаются ситуации, когда уравнение не имеет корней в множестве действительных чисел. Например, квадратное уравнение не имеет действительных корней, если его дискриминант отрицательный.

Расширением понятия числа является понятие комплексного числа. Введено число i, которое считают решением квадратного уравнения $x^2+1=0$, то есть считают справедливым равенство $i^2+1=0$ *или* $i^2=-1$. Число i называют **мнимой** единицей.

Комплексными числами называют выражения вида $z=a+bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица (i^2 = -1). При этом число a называется *действительной частью* комплексного числа *z,* число b – *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается: $a=\operatorname{Re}z$, $b=\operatorname{Im}z$.

Например, комплексное число $z=1-3i$ имеет действительную часть $a=\operatorname{Re}z=1$, и мнимую часть $b=\operatorname{Im}z=-3$. Комплексное число $z=-i$ имеет действительную часть $a=\operatorname{Re}z=0$, и мнимую часть $b=\operatorname{Im}z=-1$.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой C.

Если $a=0$, то число $z=0+bi=bi$ называется *чисто мнимым*. Если $b=0$, то число $a+0i=a$ отождествляется с действительным числом a, а это означает, что множество всех действительных чисел R является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т.е. $R\subset C$.

Два комплексных числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называются *равными* $z_1=z_2$ тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $a_1=a_2, b_1=b_2$. Понятие «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводится.

Два комплексных числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *комплексно сопряженными*.

Для числа $z=-1+2i$ сопряженным является $\bar{z}=-1-2i$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат точки координатной плоскости *Oxy*. Плоскость называется комплексной, если каждому комплексному числу $z = a + bi$ ставится в соответствие точка *M*(*a;b*). И, наоборот, каждую точку *M*(*a;b*) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = a + bi$. Ось *Ox* называют *действительной* осью, так как на ней лежат действительные числа $z = a + 0i = a$, а ось *Oy*, на которой расположены чисто мнимые числа $z = 0 + bi = bi$ - *мнимой* осью.

Комплексное число $z = a + bi$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (a;b)$. Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число *z*, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или *r* (Рис.1).

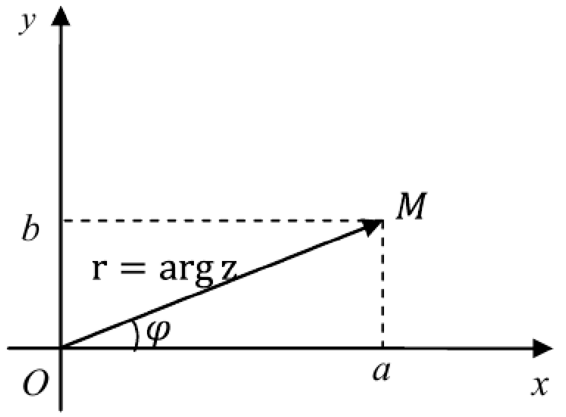

Рис. 1 Изображение комплексного числа

Модуль определяется по формуле:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* комплексного числа и обозначается φ или *Arg z*. Аргумент комплексного числа величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого 2πk.

$$\varphi = Arg\, z = arg\, z + 2\pi k, \quad -\pi < arg\, z \le \pi$$

(arg z – главное значение аргумента).

Аргумент числа z=0 определен.

Очевидно, что $a = r \cdot \cos\varphi,\ b = r \cdot \sin\varphi.$ Тогда аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r},\ tg\varphi = \frac{a}{b}.$

На практике удобнее находить argz из последней формулы

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\frac{b}{a} \text{ для внутренних точек I и IV четвертей,} \\ arctg\,\frac{b}{a} + \pi \text{ для внутренних точек II четверти,} \\ arctg\,\frac{b}{a} - \pi \text{ для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = a + bi$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Запись числа z в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* комплексного числа.

Пример 1.

Записать комплексные числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме. Изобразить числа на комплексной плоскости.

Решение:

1) Найдем модуль и аргумент числа z_1: $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Так как число находится во второй четверти, то $\arg z = arctg\,\frac{1}{-1} + \pi = arctg\,(-1) + \pi = -arctg 1 + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$

Следовательно, $z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4})$.

2) Найдем модуль и аргумент числа z_2: $r_2 = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. Так как число находится в четвертой четверти, то

$$\arg z = arctg\frac{-1}{\sqrt{3}} = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, $z_2 = 2\cdot(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\cdot\sin(\frac{-\pi}{6}))$.

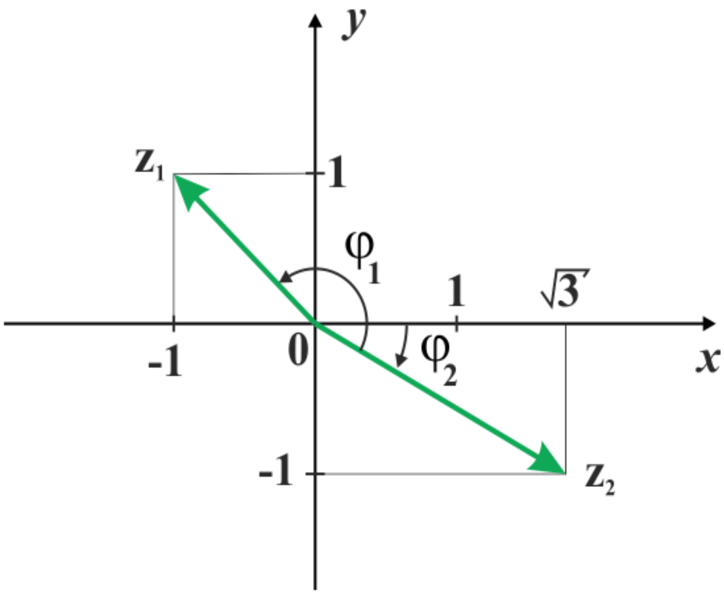

Рис.2 Изображение комплексных чисел z_1 и z_2

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Алгебраические операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел выполняются аналогично соответствующим операциям над многочленами, учитывая, что $i^2 = -1$.

1) *Сумма (разность)* комплексных чисел определяется равенством

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

2) *Произведение* комплексных чисел определяется равенством

$$z_1\cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + a_1b_2 i + b_1a_2 i + b_1b_2 i^2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i,$$

т.к. $i^2 = -1$.

3) *Деление* двух комплексных чисел определяется равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + a_2^2}.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю (избавляются от мнимости в знаменателе).

Пример 2.

Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i,\ z_2 = 3 - 4i$. Найти 1) $z_1 + z_2$, 2) $z_1 - 2z_2$, 3) $z_1 z_2$, 4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

1) $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = (12 + 3) + (5 - 4)i = 15 + i,$

2) $z_1 - 2z_2 = (12 + 5i) - 2(3 - 4i) = (12 - 6) + (5 + 8)i = 6 + 13i,$

3) $z_1 \cdot z_2 = (12 + 5i) \cdot (3 - 4i) = (12 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot i^2) + (-12 \cdot 4 + 5 \cdot 3)i =$
$= (36 + 20) + (-48 + 15)i = 56 - 33i,$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{12 \cdot 3 + 5i \cdot 4i + 3 \cdot 5i + 12 \cdot 4i}{3^2 - (4i)^2} =$
$= \frac{(36 - 20) + (15 + 48)i}{9 - 16i^2} = \frac{16 + 63i}{9 + 16} = \frac{16 + 63i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{63}{25} i.$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Тригонометрическую форму удобно использовать для выполнения операций *умножения* и *деления* комплексных чисел.

Действительно, если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ - комплексные числа, записанные в тригонометрической форме. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Чтобы вычислить n-ю степень комплексного числа z, положим в формуле произведения комплексных чисел $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$. Тогда, $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$, и, следовательно,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула называется *формулой Муавра возведения в степень*.

Пример 3.

Вычислить $(-1+i)^{10}$.

Решение:

Тригонометрическую форму числа $z = (-1+i)$ мы нашли в примере 1 $z = -1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$. И тогда по формуле Муавра $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ получим

$(-1+i)^{10} = \sqrt{2}^{10}(\cos(10\cdot\frac{3\pi}{4}) + i\sin(10\cdot\frac{3\pi}{4})) = 2^5(\cos\frac{15\pi}{2} + i\sin\frac{15\pi}{2}) = 32(0+1\cdot i) = 32i.$

Извлечение корня n-ой степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число ώ, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$ т.е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Корень n-ой степени из комплексного числа z вычисляется по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), k = 0,1,\ldots n-1.,$$

которая называется *формулой Муавра извлечения корней* из комплексного числа z.

Глядя на эту формулу, мы видим, что корень n-ой степени из комплексного числа z имеет n различных значений.

Пример 4. Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение:

Найдем тригонометрическую форму числа $z = i.$ Модуль $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$. Аргумент числа $z = i$ равен $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $z = i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

И тогда по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), k = 0,1,...,n-1$$

Получим

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right), \ k = 0,1,2.$$

Полагая в последней формуле *k*=0, 1, 2, получим:

При *k*=0

$$\omega_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 0}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

При *k*=1

$$\omega_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 1}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 1}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

При *k*=2

$$\omega_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 2}{3}\right) = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} =$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = i \cdot (-1) = -i.$$

Таким образом, имеем три значения корня кубичного из числа *z*=*i*:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \ \omega_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \ \omega_2 = -i.$$